

*Микола СТАЩУК<sup>1</sup>, Галина ІВАСИК<sup>2</sup>, Юрій МАТУРІН<sup>3</sup>*

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВПЛИВУ НАПРУЖЕНЬ НА  
ЕЛЕКТРОПОТЕНЦІАЛИ У ЗАПОВНЕНОМУ СЕРЕДОВИЩЕМ  
ТРІЩИНОПОДІБНОМУ ДЕФЕКТИ**

<sup>1</sup>*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України  
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна. E-mail: nikstashchuk@gmail.com*

<sup>2</sup>*Національний університет «Львівська політехніка»  
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.*

<sup>3</sup>*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка  
вул. Стрийська, 3, Дрогобич, 82100, Україна.*

*Mykola STASHCHUK<sup>1</sup>, Halyna IVASYK<sup>2</sup>, Yuriy MATURIN<sup>3</sup>*

**DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE EFFECT OF STRESSES ONTO ELECTRIC  
POTENTIALS IN A FILLED WITH A SUBSTANCE  
CRACK-TYPE DEFECT**

*1 Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine  
5, Naukova St. Lviv, 79060, Ukraine. E-mail: nikstashchuk@gmail.com*

<sup>2</sup>*Lviv Polytechnic National University  
12, Bandery St, 79013, Lviv, Ukraine.*

<sup>3</sup>*Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University  
3, Stryjska St, 82100, Drohobych, Ukraine.*

**ABSTRACT**

The influence of the stresses field on the electric potential change in the thin elongate elliptic opening filled a liquid an elastic metallic body was analytically studied in this paper. The solution of the system of Gelmgolts equations is the basis of the performed researches that describe distribution of electric potentials in a metal, double electric layer and a medium. As a result graphic dependences the electric potential change are built for the elliptic opening filled by a liquid, and also the corresponding displacement of electrode potential at the interface liquid and a stressed metal were calculated.

**KEY WORDS:** *elliptic hole, willed with environment, a mechanical stresses field, shift of electric and electrode potentials, a double electrical layer.*

**ВСТУП**

Електрохімічна корозія є одним з найсуттєвіших і найпоширеніших чинників, що впливають на ефективність використання конструкційних матеріалів та їх довговічність за заданих умов експлуатації. Прояв корозії відбувається в результаті порушення термодинамічної стійкості металу в корозійно активному середовищі і є гетерогенною електрохімічною реакцією електроліту (води, водних розчинів солей, кислот, лугів та інших реагентів) з металом. Електрохімічна взаємодія середовища з металом змінюється, якщо підвищується енергетичний рівень частинок середовища або кристалічної ґратки металу [1, 2], що може відбуватися, наприклад, в результаті дії поля напружень [3-7]. Крім того, вплив середовища через наявні в матеріалі внутрішні та поверхневі дефекти (тріщини, раковини, порожнини, пітинги, тощо), спричиняє зміну його характеристик статичної і втомної міцності. Дослідження впливу механічних навантажень на корозійний стан під час експлуатації елементів конструкцій вимагає врахування дії електричних полів, обумовлених відповідним напружено-деформованим станом біля різного типу пошкоджень, зокрема заповнених середовищем пор, тріщин, включень та й інших конструктивних чи технологічно необхідних дефектів [8, 9].

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо нескінченне металеве тіло з еліптичним отвором (рис. 1), яке розтягується на безмежності зусиллями інтенсивності  $p$ . Приймаємо, що розглядуване тіло знаходиться в умовах плоскої задачі [8, 9] теорії пружності. Еліптичний отвір заповнений середовищем. Як наслідок дії механічних навантажень в такому тілі виникає напружено-деформований стан, який ініціює зміну електричних потенціалів [1] в системі метал-середовище та приводить до зміщення електродного потенціалу системи в катодну або анодну сторони. Потрібно встановити характер розподілу цього потенціалу при заданих умовах навантаження та вказати локації ділянок катодного і анодного характеру.

За контакту металевого тіла із середовищем на лінії їх поділу виникає подвійний електричний шар [2]. Приймаємо, що товщина шару становить  $\lambda$  (рис. 1).

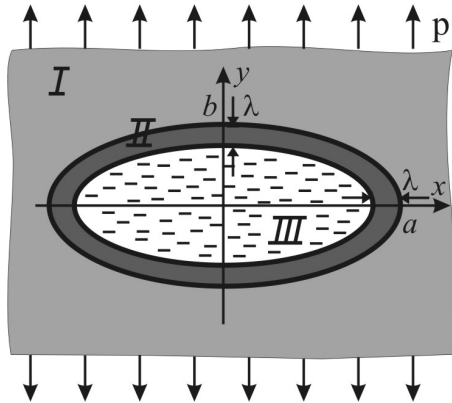


Рис. 1. Еліптичний отвір, заповнений середовищем, у пружному тілі, навантаженому зусиллями інтенсивності  $p$ .

$I$  – метал;  $II$  – подвійний електричний шар;  $III$  – середовище.

Fig. 1. An elliptical hole filled with environment, in an elastic body loaded with forces of intensity  $p$ .

$I$  – metal;  $II$  – a double electric layer;  $III$  – environment.

Рівняння для визначення електричного потенціалу  $\varphi_m(x, y)$  для пружного металевого тіла в декартових координатах запишеться наступним чином [1]:

$$\Delta \varphi_m(x, y) = \chi_m^2 \varphi_m(x, y) + \frac{\beta K}{\varepsilon_0} \varepsilon_\sigma(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_m, \quad (1)$$

де  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – оператор Лапласа,  $\chi_m^2 = \rho_m C_m \varepsilon_0^{-1}$ , а  $\rho_m$ ,  $C_m$  – відповідно густина та електроємність корозійно активного металу,  $\varepsilon_0$  – діелектрична стала;

$\varepsilon_\sigma(x, y) = p \frac{1 + \nu}{3K} \left( 1 + \operatorname{Re} \left( \frac{(a+b)^2 + a^2 - b^2}{z^2 + z\sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - a^2 + b^2} \right) \right)$  – відносне об'ємне розширення у

випадку плоскої задачі для тіла з еліптичним вирізом [4];  $\beta$  – електрострикційний коефіцієнт об'ємного розширення [1];  $\nu$ ,  $K$  – відповідно, коефіцієнт Пуассона та модуль об'ємного стиску;  $\Omega_m = \{(x, y): x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1\}$ ;  $a$ ,  $b$  – півосі еліптичного вирізу.

Рівняння для визначення електричних потенціалів в подвійному електричному шарі  $\varphi_{mc}$  та середовищі  $\varphi_c$  згідно [2-7] матимуть вигляд:

$$\Delta \varphi_{mc}(x, y) = \chi_{mc}^2 \varphi_{mc}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{mc}, \quad (2)$$

$$\Delta \varphi_c(x, y) = \chi_c^2 \varphi_c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_c. \quad (3)$$

Тут  $\Omega_{mc} = \{(x, y): (x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1) \cap (x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 > 1)\}$ ,

$\Omega_c = \{(x, y): x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 < 1\}$ ;  $\chi_{mc}^2 = 2F^2 I(\varepsilon \varepsilon_0 R_g T)^{-1}$  та  $\chi_c^2 = e^2 (kT \varepsilon \varepsilon_0)^{-1} \sum_i z_i^2 n_i$  –

сталі подвійного електричного шару та середовища, де  $I$  – йонна сила розчину, визначена за теорією розчинів Дебая-Хюккеля;  $F$  – число Фарадея;  $R_g$  – універсальна газова стала;  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища;  $ez_i$  – заряд  $i$ -го сорту іонів;  $n_i$  – їх кількість;  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – абсолютна температура.

Умови спряження для системи диференціальних рівнянь (1)-(3) приймаємо наступними:

$$\varphi_m(x, y) = \varphi_{mc}(x, y), \quad \sigma_m \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial \vec{n}^m} = \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(x, y)}{\partial \vec{n}^{mc}}, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (4)$$

$$\varphi_c(x, y) = \varphi_{mc}(x, y), \quad \sigma_c \frac{\partial \varphi_c(x, y)}{\partial \bar{n}^c} = \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(x, y)}{\partial \bar{n}^{mc}}, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (5)$$

Тут  $\Gamma_1 = \{(x, y): x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$  - контур розділу металу з подвійним прошарком,  $\Gamma_2 = \{(x, y): x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 = 1\}$  - контур розділу подвійного прошарку із середовищем;  $\partial / \partial \bar{n}^V$  - похідна по одиничній зовнішній нормалі межі області  $\Omega_V$  (тут і нижче індекс  $V$  відповідає металевій області ( $m$ ), подвійному шарові ( $mc$ ) та середовищу ( $c$ ); область  $\Omega_m$  визначається стосовно конкретної задачі);  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{mc}$  та  $\sigma_c$  - електропровідність металу, електричного шару та середовища. Межі  $(x, y) \in \Gamma_j$  ( $j=1,2$ ) та області  $\Omega_V$  зображені на рис. 1. Також потрібно врахувати обмеженість електричного потенціалу в металі на далекій відстані від дефекту. Умови (4),(5) забезпечують неперервність електричних потенціалів та нормальних складових струмів на межі поділу відповідних електропровідних фаз.

Первинною такого плану стає задача аналітичного моделювання заповненої середовищем тріщиноподібної порожнини витягнутим еліпсом. На основі її розв'язання можна оцінити електрохімічну ситуацію у вершині заповненої середовищем тріщини в металевому тілі. Нижче розглянуто заповнений середовищем еліптичний отвір та його граничний випадок - витягнутий еліпс. Потрібно встановити вплив напружено-деформованого стану на розподіли електричних потенціалів у металі та середовищі в такому дефекті, а також оцінити відповідний електродний потенціал на межі поділу середовища й деформованого металу.

Для визначення розподілу електричних потенціалів у напружено-деформованому металі, подвійному електричному шарі, який виникає під час контакту металу і середовища, а також у середовищі, що контактує з металом, необхідно отримати аналітичний розв'язок системи рівнянь (1)-(3).

Для заповненого середовищем еліптичного отвору знайдено розв'язок першого рівняння системи (1) в представленні комбінацій функцій Mat'є [10] та встановлено, що деформації на контурі такого дефекту зміщують електричний потенціал. Однак, оскільки параметр  $\chi_m^2$ , що входить у перше рівняння системи (1), становить  $\approx 10^{18}$ , то його розв'язок можна подати у вигляді часткового розв'язку  $\varphi = \varphi_{ch} = -\frac{\beta K \varepsilon \sigma}{\chi_m^2 \varepsilon_0}$ , чого не можна отримати для

двох інших рівнянь системи (1)-(3), оскільки вони однорідні. Тому для спрощення аналітичних викладок під час оцінки зміщення електродного потенціалу в околі вершини еліптичного отвору в розв'язках для подвійного електричного шару та середовища використано умову малозмінності координати  $y$  вздовж координати  $x$ . Тепер можемо побудувати розв'язок рівняння для середовища, що заповнює еліптичну порожнину, витягнуту уздовж осі  $Ox$ , звівши задачу до одновимірної.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

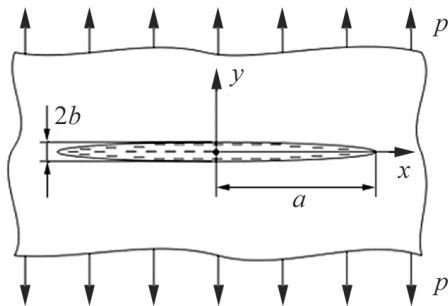


Рис. 2. Схема заповненої середовищем тріщини у формі витягнутого еліпса.

Fig. 2. A crack filled with an environment in the form of an elongated ellipse.

*Вирішення двовимірної модельної задачі в рамках одновимірної для витягнутого еліпса.* Нехай середовище заповнює порожнину, що має вигляд вирізаного, витягнутого вздовж однієї з осей  $Ox$ , еліптичного циліндра (рис. 2). Потрібно відшукати розв'язок третього рівняння системи рівнянь (1)-(3).

Оскільки еліптичний виріз сплюснутий по осі  $Oy$ , то, приймаючи  $b \ll a$ , вважатимемо, що його контур майже збігається з відповідним відрізком  $[-a; a]$  на осі  $Ox$ . Тоді з рівняння контуру такого еліпса можна записати:

$$x = \frac{1}{\omega} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \text{де } \omega = \frac{b}{a} \ll 1.$$

Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_c}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_c}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Тут

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\omega} \sqrt{b^2 - y^2} \right) = -\frac{y}{\omega \sqrt{b^2 - y^2}}, \quad \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{y^2}{\omega^2 (b^2 - y^2)}. \quad (7)$$

Підрахуємо також

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{1}{\omega} \frac{b^2}{(b^2 - y^2) \sqrt{b^2 - y^2}}. \quad (8)$$

На основі формул (6)–(8), позначивши  $\eta = y/b$ , знайдемо:

$$\frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial y^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} - \frac{1}{a\omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2} (1 - \eta^2)} \frac{\partial \varphi_c}{\partial x}. \quad (9)$$

Вважаючи в подальшому  $\eta$  сталим параметром, прийдемо до звичайного диференційного рівняння

$$\left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} - \frac{1}{a\omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2} (1 - \eta^2)} \frac{d\varphi_c}{dx} - \chi_c^2 \varphi_c = 0. \quad (10)$$

Прийmemo, що  $A(\eta) = 1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$ ;  $B(\eta) = -\frac{1}{a\omega^2} \frac{1}{(1 - \eta^2) \sqrt{1 - \eta^2}}$ . З огляду уведених

позначень та аналітичних перетворень рівняння (3) запишемо так:

$$A(\eta) \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} + B(\eta) \frac{d\varphi_c}{dx} - \chi_c^2 \varphi_c = 0. \quad (11)$$

Тут  $\eta$  вважаємо незалежним від змінної  $x$ . Диференціальне рівняння (11) описує зміну електропотенціалу середовища для заповненої ним тріщини.

*Аналітичний вираз електричного потенціалу середовища для заповненої ним тріщини.*

Фундаментальні розв'язки останнього рівняння шукаємо у вигляді  $e^{\lambda_i x}$ , де  $\lambda_i$  ( $i = 1; 2$ ) потрібно встановити. Для цього запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$A(\eta) \lambda_i^2 + B(\eta) \lambda_i - \chi_c^2 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B(\eta) \pm \sqrt{B^2(\eta) + 4\chi_c^2 A(\eta)}}{2A(\eta)},$$

або, враховуючи введені позначення, одержуємо:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{a\omega^2} \frac{1}{(1 - \eta^2) \sqrt{1 - \eta^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2 \omega^4} \frac{1}{(1 - \eta^2)^3} + 4\chi_c^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right)}}{2 \left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right)}. \quad (12)$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння (11) шукатимемо у вигляді

$$\varphi_c(x, y) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (13)$$

Константи  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з граничних умов:  $\varphi_c(0, 0) = \varphi_{c0}$  – середовище;  $\varphi_c(a - h, 0) = \varphi_{mc}(a - h, 0)$  – середовище – подвійний електричний шар, де  $h = \lambda$  – товщина подвійного електричного шару;  $\varphi_{mc}(a, 0) = \varphi_m(a, 0)$  – подвійний електричний шар – метал.

Розв'язок рівняння (11), що визначає електричний потенціал середовища  $\varphi_c(x, y)$  всередині витягнутого еліпса за вказаних граничних умов такий:

$$\varphi_c(x, y) = \frac{\left(\varphi_c(a-h, 0) - \varphi_{c0} e^{\lambda_2(\eta)a}\right) e^{\lambda_1(\eta)x} - \left(\varphi_c(a-h, 0) - \varphi_{c0} e^{\lambda_1(\eta)a}\right) e^{\lambda_2(\eta)x}}{e^{\lambda_1(\eta)(a-h)} - e^{\lambda_2(\eta)(a-h)}}, \quad (14)$$

$$\text{де } \lambda_{1,2}(\eta) = \frac{\frac{1}{a\omega^2} \frac{1}{(1-\eta^2)\sqrt{1-\eta^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2\omega^4} \frac{1}{(1-\eta^2)^3} + 4\chi_c^2 \left(1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\right)}}{2\left(1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\right)}, \quad \eta = y/b; \quad \omega = b/a.$$

Розподіл електричного потенціалу  $\varphi_{mc}$  у подвійному електричному шарі подамо так:

$$\varphi_{mc}(x) = Ae^{\chi_{mc}x} + Be^{-\chi_{mc}x}, \quad a-h \leq x < a, \quad (15)$$

де  $A, B$  – константи, які знаходимо на основі загального розв'язку системи рівнянь (1)-(3), задовольняючи вище вказані умови спрження.

Результати розрахунків електродного потенціалу  $\Delta\varphi = \varphi_m - \varphi_c$  згідно формул (14)-(15) ілюструють рис. 3, рис. 4.

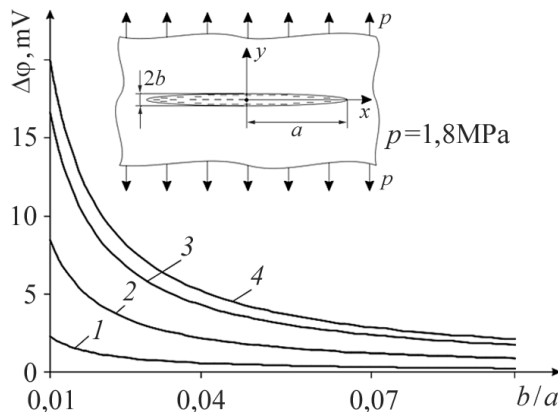


Рис. 3. Зміна електродного потенціалу у вершині витягнутого еліпса від співвідношення півосей еліпса  $b/a$  (якщо  $b/a = 0,01$ , досягається відносна деформація 0,2% для навантаження  $p = 1,8$  МПа): 1 – 0,03% NaCl; 2 – 0,3% NaCl; 3 – 1% NaCl; 4 – 3% NaCl.

Fig. 3. Change of electrode potential in the tip of the elongated ellipse on correlation of the ellipse axes  $b/a$  (when  $b/a = 0.01$  relative deformation 0.2% is achieved for loading  $p = 1.8$  МПа): 1 – 0.03% NaCl; 2 – 0.3%; 3 – 1% NaCl; 4 – 3% NaCl.

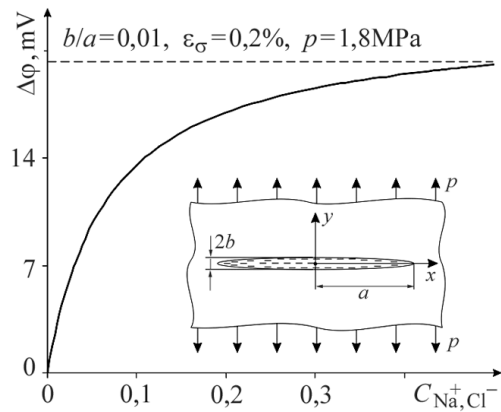


Рис. 4. Залежність зміщення електродного потенціалу у вершині витягнутого еліпса від концентрації  $C_{NaCl}$  середовища.

Fig. 4. Dependence of the electrode potential displacement at the tip of the longated ellipse on composition of environment  $C_{NaCl}$ .

Розрахунки характеристик середовища та подвійного електричного шару для 1%;0,3%;0,3% -го NaCl [3], яке заповнює еліптичний отвір у металі показали, що:  $\chi_c = 5,84 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ ,  $\chi_c = 3,87 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ ,  $\chi_c = 1,49 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ ;  $\chi_{mc} = 8,26 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ ,  $\chi_{mc} = 5,47 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ ,  $\chi_{mc} = 2,12 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ . Під час обчислень електродного потенціалу приймали:  $p = 1,8$  МПа,  $\beta = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ V}^{-1}$ ,  $C = 10^3 \text{ Kl/(V}\cdot\text{kg)}$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $a = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Виявляється, що при взаємодії з середовищами різної активності максимальне зміщення електродного потенціалу у вершині тріщини досягається за співвідношення півосей еліпса  $b/a = 0,01$  (рис. 3, криві 1–4). Найбільше ( $\Delta\varphi \approx 20 \text{ mV}$ ) електродний потенціал зміщується під час контакту металу з 3%-м розчином NaCl. Із залежності зміщення електродного потенціалу у вершині витягнутого еліпса ( $b/a = 0,01$ ,  $a = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $p = 1,8$  МПа,  $\varepsilon_\sigma = 0,2\%$ ) від концентрації  $C_{NaCl}$  середовища (рис. 4) випливає, що зі збільшенням вмісту іонів  $\text{Na}^+$  та  $\text{Cl}^-$  від 0 до  $0,5 \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$

в розчині електродний потенціал  $\Delta\phi$  спочатку швидкого росте, а потім, починаючи з 0,2, плавно змінюється, досягаючи значення  $\approx 20$  mV. Заповнення воденьвмісним середовищем [11] тріщиноподібного дефекта у вигляді витягнутого еліпса тенденційно приводить до аналогічних результатів.

### ВИСНОВКИ

Диференціальні рівняння впливу напружень на електродні потенціали у заповненому середовищем тріщиноподібному дефекті дали змогу оцінити зсув електродного потенціалу у вершині витягнутого еліпса - тріщини. Еліптичні отвори, які є вузькими, приводять до значних зміщень електродних потенціалів у пружних тілах, звідки можна зробити висновок, що найбільш значимою щодо зміни електродного потенціалу у пружному тілі стає саме тріщина, чого і слід було очікувати, судячи про концентрацію напружень в околі її вершини. Кількісно для еліптичного отвору в зоні максимальної концентрації напружень виникає значно більший електродний потенціал в порівнянні з коловим отвором. При цьому із числового аналізу рівнянь випливає, що область при вершині тріщини повинна працювати як анодна ділянка у взаємодії металу з електро-хімічно активним середовищем.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.
2. Антропов Л.І. Теоретична електрохімія. – К.: Либідь, 1993. – 544 с.
3. Стащук М.Г. Визначення електродного потенціалу та струмів корозії уздовж поверхонь концентраторів напружень. / За заг. ред. В.В. Панасюка // Механіка руйнування і міцність конструкцій: у 3-х т – Львів: Каменяр, 1999. – Вип. 2. – С. 213-219.
4. Stashchuk M. H. Analysis of the influence of elastic deformation on the electrode potential of a metal cylinder in a medium // Materials Science – 2000. – Vol. 36, № 1. – P. 54–59.
5. Аналітичне визначення впливу пружних деформацій на електродні потенціали біля плоских поверхонь металевих тіл / В.Г. Горопацький, І.М. Дмитрах, М.Г. Стащук, Р.В. Коваленко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – 2001. – Вип. 3. – С. 61-76.
6. Evaluation of the shift of the electrode potential for the metal of a beam specimen subjected to pure bending in a medium / M.H. Stashchuk, I.M. Dmytrakh, M.I. Dorosh, R.L. Leshchak // Materials Science. – 2008. – Vol. 44, № 5. – P. 85–92.
7. Стащук М.Г., Горопацький В.Г. Залежність зміни електродного потенціалу на контурі заповненого корозійним середовищем кругового дефекту металічної пластини від навантаження // Машинознавство. – 2000. – № 6. – С. 2-7.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Стащук М.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 357 с.
10. Стащук М.Г., Малик О.М. Розподіл електричного потенціалу в тілі з еліптичним отвором при механічному навантаженні // Машинознавство. – 2006. – № 4. – С. 33–43.
11. Stashchuk M. H. Influence of Hydrogen Concentration on the Stresses in a Solid Metallic Cylinder // Materials Science. – 2018. – Vol. 53, № 6. – P. 823–831.